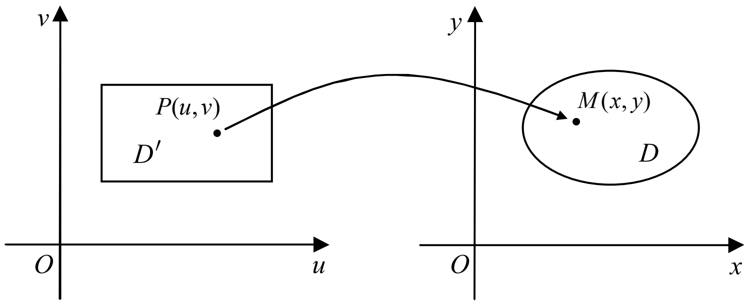
Całka podwójna - zamiana zmiennych w całce podwójnej

Przy obliczaniu całki podwójnej wskazane jest czasami przeprowadzenie zamiany zmiennych. Może to znacznie uprościć wykonywane obliczenia.

Niech $\varphi(u,v)$ i $\psi(u,v)$ będą funkcjami określonymi w pewnym obszarze płaskim D'. Załóżmy, że równania

(3) $$x=\varphi(u,v)\ ,\quad y=\psi(u,v)$$

przyporządkowują każdemu punktowi $P(u,v)$ obszaru D' pewien punkt $M(x,y)$ obszaru D (rys. 13) w taki sposób, że różnym punktom obszaru D' odpowiadają różne punkty obszaru D i że każdy punkt obszaru D odpowiada pewnemu punktowi obszaru D'. Przekształcenie takie nazywamy *wzajemnie jednoznacznym.*



Rys. 13. Ilustracja graficzna przekształcenia obszarów na płaszczyźnie

Jeżeli funkcje $\varphi(u,v)$ i $\psi(u,v)$ są określone i różniczkowalne w obszarze D', to wyznacznik

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nazywamy *jakobianem* przekształcenia (3).

Twierdzenie (o zamianie zmiennych w całce podwójnej).
Jeżeli:

1) funkcje $\varphi(u,v)$ i $\psi(u,v)$ są ciągłe i mają ciągłe pochodne w obszarze regularnym D' i na jego brzegu,
2) funkcja f jest ciągła w obszarze regularnym D,
3) przekształcenie (3) wnętrza obszaru D' na wnętrze obszaru D jest wzajemnie jednoznaczne,
4) jakobian $J(u,v)$ przekształcenia (3) jest różny od zera w obszarze D, to

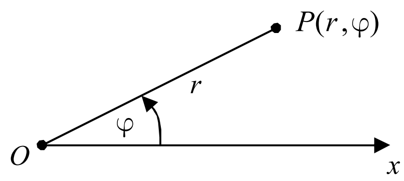
(4) $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot\left|J(u,v)\right|dudv\,.$$

W niniejszym opracowaniu ograniczymy się jedynie do wykorzystania przekształcenia określającego zależności między współrzędnymi biegunowymi i kartezjańskimi, ale oczywiście można stosować również inaczej zdefiniowane przekształcenia.

Przed podaniem odpowiedniego twierdzenia przypomnijmy podstawowe wiadomości dotyczące współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie.

Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie

Niech na płaszczyźnie zorientowanej (płaszczyźnie na której został ustalony dodatni kierunek obrotu) dany będzie punkt O zwany *biegunem* oraz półprosta Ox o początku w punkcie O zwana *osią biegunową*. Mówimy wówczas, że na płaszczyźnie został określony *układ współrzędnych biegunowych*. Każdemu punktowi P (różnemu od O) w tym układzie można przyporządkować parę liczb (r,φ), gdzie r jest odległością punktu P od bieguna O, a φ jest miarą kąta, jaki tworzy promień wodzący punktu P z osią biegunową. Liczby te nazywamy *współrzędnymi biegunowymi* punktu P (rys. 14).



Rys. 14. Współrzędne biegunowe punktu

Współrzędne biegunowe w całce podwójnej

W przypadku, gdy obszar D jest kołem, pierścieniem lub wycinkiem jednej z tych figur wygodnie jest przy obliczaniu całki podwójnej wprowadzić współrzędne biegunowe. Wykorzystujemy w tym przypadku łatwe do wyprowadzenia zależności pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi danego punktu na płaszczyźnie:

(5)
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Obliczmy jakobian przekształcenia (5):

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r\,.$$

Zatem w tym przypadku wzór (4) przyjmie postać:

(6)
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\psi\,.$$

Przykład. Korzystając ze współrzędnych biegunowych obliczyć całki podwójne po podanych obszarach:

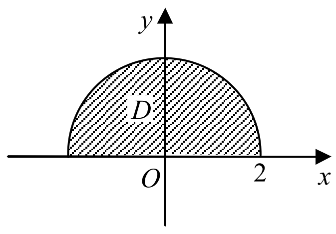
a) $\iint_D (x^2+y^2+1)dxdy$, $D:\ x^2+y^2\le 4,\quad y\ge 0$,

b) $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D:\ \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$,

c) $\iint_D xy\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym górną połową okręgu $x^2+y^2-2x=0$ oraz osią Ox.

Rozwiązanie.

a) Na podstawie podanych nierówności stwierdzamy, że obszar D jest połówką koła o środku w początku układu współrzędnych oraz promieniu $R=2$, ograniczoną od dołu osią Ox (rys. 15). Z uwagi na kształt obszaru D wprowadzamy współrzędne biegunowe: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.



Rys. 15

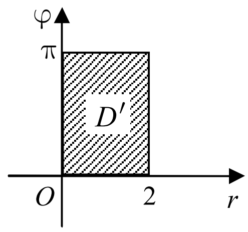
Korzystając ze wzoru (6) możemy zapisać:

$$I=\iint_D (x^2+y^2+1)dxdy=\iint_{D'}(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi+1)r\,drd\varphi=$$
$$=\iint_{D'}\left[r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+1\right]r\,drd\varphi=\iint_{D'}(r^2+1)r\,drd\varphi=\iint_{D'}(r^3+r)\,drd\varphi$$

Ostatnią całkę obliczymy zamieniając ją na całki iterowane. W tym celu musimy określić, w jakich przedziałach zmieniają się współrzędne biegunowe każdego punktu obszaru D. Łatwo stwierdzić, że kąt φ przyjmuje wartości z przedziału $[0,\pi]$, natomiast r zmienia się od 0 do 2. Wobec tego:

$$D'=\{(r,\varphi):\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le r\le 2\},$$

czyli obszar D' w prostokątnym układzie współrzędnych jest prostokątem (rys. 16).



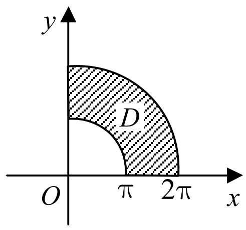
Rys. 16

Do obliczenia naszej całki stosujemy wzór z punktu $1°$ z twierdzenia dotyczącego całek podwójnych po prostokącie (alternatywnie można również zastosować wzór z punktu $2°$):

$$I=\iint_{D'}(r^3+r)\,drd\varphi=\int_0^{\pi}\left[\int_0^2(r^3+r)\,dr\right]d\varphi=\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2\right]_0^2 d\varphi=$$
$$=\int_0^{\pi}(4+2)d\varphi=6\int_0^{\pi}d\varphi=6[\varphi]_0^{\pi}=6(\pi-0)=6\pi.$$

b) Obszar D jest fragmentem pierścienia ograniczonego okręgami o środku w punkcie $O(0,0)$ oraz promieniach odpowiednio równych: π i 2π, leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (rys. 17). W celu uproszczenia obliczeń wprowadzimy współrzędne biegunowe. Łatwo zaobserwować, że gdy punkt $M(x,y)$ zmienia się w obszarze D, to jego współrzędne biegunowe spełniają warunki:

$$D':\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ \pi\le r\le 2\pi\end{cases}.$$



Rys. 17

Możemy przejść do obliczenia danej całki:

$$I=\iint_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{D'}\cos\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\cdot r\,drd\varphi=$$
$$=\iint_{D'}r\cos r\,drd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\pi}^{2\pi}r\cos r\,dr\right)d\varphi.$$

Wykonajmy oddzielnie obliczenia pomocnicze. Otrzymaną całkę względem zmiennej r obliczamy przez części:

$$\int r\cos r\,dr=\begin{vmatrix}u=r & v'=\cos r\\ u'=1 & v=\sin r\end{vmatrix}=r\sin r-\int\sin r\,dr=r\sin r+\cos r+C.$$

Zatem

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\pi}^{2\pi}r\cos r\,dr\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r\sin r+\cos r\right]_{\pi}^{2\pi}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(0+1)-(0-1)\right]d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi\,.$$

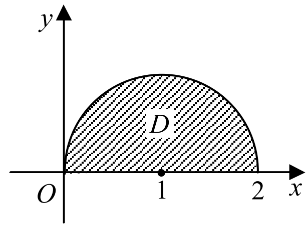
c) Aby sporządzić rysunek obszaru D sprowadźmy równanie danego okręgu do postaci ogólnej:

$x^2+y^2-2x=0$,

$x^2-2x+y^2=0$,

$(x-1)^2-1+y^2=0$,

$(x-1)^2+y^2=1$.



Rys. 18

Mamy zatem do czynienia z okręgiem o początku w punkcie $(1,0)$ i promieniu $R=1$. Stąd obszar D przedstawia się tak, jak na rysunku 18. Wprowadzamy współrzędne biegunowe: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Łatwo stwierdzić, że współrzędna biegunowa φ każdego punktu zakreślonego obszaru zmienia się w przedziale $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Aby wyznaczyć prawy koniec (lewy jest równy 0) przedziału zmienności współrzędnej biegunowej r dowolnego punktu obszaru D zapisujemy równanie danego okręgu w układzie biegunowym:

$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2-2r\cos\varphi=0$,

$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2r\cos\varphi$,

$r^2=2r\cos\varphi$,

$r=2\cos\varphi$.

Możemy zatem zapisać:

$$D'=\left\{(r,\varphi):\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2\cos\varphi\right\}.$$

Stosując wzór (6) oraz obliczamy daną całkę podwójną:

$$\iint_D xy\,dxdy=\iint_{D'} r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, r\,drd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\varphi} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,dr\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(4\cos^4\varphi-0\right)d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\left|\begin{matrix}\cos\varphi=t\\ \sin\varphi d\varphi=-dt\end{matrix}\right|=-4\int_1^0 t^5dt=4\int_0^1 t^5dt=4\left[\frac{1}{6}t^6\right]_0^1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Korzystając ze współrzędnych biegunowych obliczyć całki podwójne po podanych obszarach:

16. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$; $D: x^2+y^2\le 1$,

17. $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$; D jest ograniczony okręgami: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$,

18. $\iint\limits_D y\,dxdy$; D jest ćwiartką koła $x^2 + y^2 \le 1$ leżącą w II ćw. układu współrzędnych,

19. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} dxdy$; $D: x^2 + y^2 \le 4$,

20. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$; $D: x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x$,

21. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$; D jest ograniczony okręgami: $x^2 + y^2 = \pi^2$, $x^2 + y^2 = 4\pi^2$,

22. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy$; D jest ograniczony okręgiem $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch